2° LEZIONE CORSO ECCELLENZA MATEMATICA

11/02/2021 PROF. FURLANETTO CARLO

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

NOZIONE DI LIMITE PER UNA SUCC. REALE

SE $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ È SUCC. DI ELEMENTI DI UN INSIEME X, ED S È UN SOTTOINSIEME DI X, SI DICE CHE $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ SI TROVA DEFINITIVAMENTE IN S SE ESISTE $J_S \in \mathbb{N}$ TALE CHE

$x_j \in S \quad \forall j \geq J_S$.

$\mathbb{R}^* = \tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

DEF. SIA $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ SUCC. DI $\mathbb{R}^*$, E SIA $\ell \in \mathbb{R}^*$.

SI DICE CHE $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ HA PER LIMITE $\ell \in \mathbb{R}^*$ PER j TENDENTE ALL'INFINITO, SE LA SUCC. $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ SI TROVA DEFINITIVAMENTE IN OGNI INTORNO DI ℓ IN $\mathbb{R}^*$

$$\lim_{j \to +\infty} x_j = \ell$$

[QUINDI $\forall V$ INT. DI $\ell \in \mathbb{R}^*$ ESISTE $J_V \in \mathbb{N}$ TALE CHE $x_j \in V \quad \forall j \geq J_V$]

DEF. SIA $D \subseteq \mathbb{R}^*$ E SIA $c \in \mathbb{R}^*$ DI ACC. PER D.

SIA $f: D \to \mathbb{R}^*$ FUNZIONE E SIA $\ell \in \mathbb{R}^*$.

SI DICE CHE f HA PER LIMITE ℓ QUANDO x TENDE c, SE PER OGNI SUCC. $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ DI EL. DI D DISTINTI DA c CHE TENDE A c, SI HA

$$\lim_{j \to +\infty} f(x_j) = \ell$$

E SI SCRIVE $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$

[QUINDI DIRE CHE $f(x)$ TENDE A ℓ PER x CHE TENDE A c VUOL DIRE CHE f TRASFORMA LE SUCC. DI $D \setminus \{c\}$ CHE TENDONO A c IN SUCC. CHE TENDONO TUTTE AD ℓ]

DEF. ALTERNATIVA (EQUIVALENTE) DI LIMITE

DEF. SIA $D \subseteq \mathbb{R}^*$ E SIA $c \in \mathbb{R}^*$ DI ACC. PER D.

SIA $f: D \to \mathbb{R}^*$ FUNZIONE E SIA $\ell \in \mathbb{R}^*$.

SI HA $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ SE E SOLTANTO SE

PER OGNI INTORNO V DI ℓ IN $\overline{\mathbb{R}}$ ESISTE UN INTORNO U DI c IN $\overline{\mathbb{R}}$ TALE CHE SIA $f(x) \in V$ PER OGNI x DI $U \cap D$ DIVERSO DA c $\left(f(U \cap D \setminus \{c\}) \subseteq V\right)$

DIM. NECESSITÀ. PER ASSURDO SUPPONIAMO CI SIA UN INTORNO V DI ℓ TALE CHE PER OGNI INTORNO U DI c L'INSIEME $f(U \cap D \setminus \{c\})$ NON SIA CONTENUTO IN V.

SI PUÒ ALLORA COSTRUIRE UNA SUCC. DI $D \setminus \{c\}$ CHE TENDE A c SENZA CHE LA SUA IMMAGINE TENDA AD ℓ: PER OGNI $j \in \mathbb{N}$ SI PRENDE $x_j \in D \cap \left]c - \frac{1}{j+1}; c + \frac{1}{j+1}\right[$ (E SE c NON È FINITO, AD ESEMPIO $c = +\infty$, SI PRENDE $x_j \in D \cap \left]j; +\infty\right[$) CON $x_j \neq c$ E TALE CHE $f(x_j) \notin V$; SI HA $\lim_{j \to +\infty} x_j = c$ MA $f(x_j) \notin V \; \forall j$, QUINDI ℓ NON È LIMITE DI $f(x_j)$.

SUFFICIENZA. SIA x_j SUCC. DI $D \setminus \{c\}$ TENDENTE A c. MOSTRIAMO CHE $f(x_j)$ TENDE AD ℓ IN $\mathbb{R}^*$. PRESO UN INTORNO V DI ℓ IN $\mathbb{R}^*$ SI PRENDA UN INTORNO U DI c TALE CHE

$$f(U \cap D \setminus \{c\}) \subseteq V,$$

POICHÉ x_j TENDE A c, ESISTE $j_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE SIA $x_j \in U$ PER $j \geq j_0$; SI HA ALLORA $f(x_j) \in V$ PER $j \geq j_0$, OVVERO $\lim_{j \to \infty} f(x_j) = \ell$.

DIMOSTRAZIONE DI ALCUNE PROP. DEGLI INFINITESIMI

PROP. 1) f INF. $\Longleftrightarrow$ $|f|$ INF.

DIM. NECESSITÀ. SIA $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0$,

ALLORA $\lim_{x \to x_0} -f(x) = -\lim_{x \to x_0} f(x) = -\ell \neq 0$

QUINDI $$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \neq 0 & \text{SE } f(x) \geq 0 \\ \lim_{x \to x_0} -f(x) = -\ell \neq 0 & \text{SE } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

[PER TEOREMA PERM. SEGNO ...]

[DIM. ALTERNATIVA $-|f| \leq f \leq |f|$, QUINDI

SE $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0 \to \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ PER T. CONFRONTO]

SUFFICIENZA _ SE $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \to \lim_{x\to x_0} -f(x) = 0$

QUINDI $\lim_{x\to x_0} |f| = \begin{cases} \lim_{x\to x_0} f = 0 & \text{SE } f(x) \geq 0 \\ \lim_{x\to x_0} -f = 0 & \text{SE } f(x) < 0 \end{cases}$

NOTIAMO ANCHE CHE a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \to \lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$,

MENTRE b) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l| \not\to \lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad (l \neq 0)$

DIM. a) : SE $l = 0$ SIAMO NEL CASO PRECEDENTE

SE $l > 0$ $(l < 0)$ PER TEO. PERM. SEGNO

ESISTE INTORNO I DI c TALE CHE

$f(x) > 0 \quad (f(x) < 0) \quad \forall x \in I \setminus \{c\} \to |f(x)| = f(x)$

$(|f(x)| = -f(x)) \quad \forall x \in I \setminus \{c\} \to \lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} f(x) = l$

$\left(\lim_{x\to c} |f(x)| = -\lim_{x\to c} f(x) = -l\right)$

b) BASTA UN CONTROESEMPIO

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \qquad \lim_{x\to 0} \left|\frac{x}{|x|}\right| = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{|x|}}{\cancel{|x|}} = 1$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$||x|| = |x|$$

MENTRE $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = -1$$

QUINDI $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$ NON ESISTE.

PROP. SE f E' INFINITESIMA IN P_0 E g E' LIMITATA IN UN INTORNO DI P_0, ALLORA $f \cdot g$ E' INFINITESIMO IN P_0.

DIM: f INF. $\to |f|$ INF. PER PROP. 1)

g LIMITATA $\to |g|$ LIMITATA $\quad 0 \le |g| \le \ell$

$-\ell \le g \le +\ell$

ESSENDO $|f| \ge 0$ $\quad |f| \cdot 0 \le |f| \cdot |g| \le |f| \cdot \ell$

$$0 \le |f \cdot g| \le |f| \cdot \ell$$

PER TEO. CONFRONTO $|f \cdot g|$ INF., QUINDI $f \cdot g$ INF. PER PROP. 1)

ES. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{|x|} \nexists$ PERCHÉ:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} - \frac{\sin x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{\sin x}{|x|} \right| = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin x}{-x} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f}{g} \right| = L \neq 0 \qquad f \doteq g$$

$$\Downarrow$$

$$\sin x \doteq |x|$$

SE ....

$\left[\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = L \neq 0 \quad f \doteq g \Rightarrow \sin x \text{ NON È CONFR. CON } |x| \right]$

$\Rightarrow x$ NON È CONFR. CON $|x|$

$$\lim_{x\to 0} \left| \frac{\cancel{x}\left(2+\overset{\nexists}{\sin\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}} \right| \nexists \Rightarrow f \text{ e } g \text{ NON CONFRONTABILI}$$

CONFRONTO TRA $f(x) = x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$

IN $x=0$ E $g(x)=x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos x}^{f}}{\underbrace{x}_{g}} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\sin x}_{0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\underbrace{1+\cos x}_{2}}}_{1/2}$$

$= 0$

$$f \overset{in}{>} g$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \ldots = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\cos x}}_{1/2}$$

$= \frac{1}{2}$

$$1-\cos x \overset{i}{=} x^2$$

- DEF. Siano f, g infinitesimi simultanei in P_0. Si dice che f ha ordine $\alpha \in \mathbb{R}^+$ rispetto a g se f ha lo stesso ordine di inf. di $|g|^\alpha$, ovvero

$$f \doteq |g|^\alpha$$

, ovvero

$$\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f}{|g|^\alpha} \right| = L \neq 0$$

, ovvero

$$\lim_{P \to P_0} \frac{|f|}{|g|^\alpha} = L \neq 0$$

Un caso importante è il confronto con $g(x) = x$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|f|}{|x|^\alpha} = L \neq 0$$

OSS. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|} \nexists$ QUINDI SE NELLA

DEF. NON CI FOSSE IL $|\;|$, x NON

AVREBBE LO STESSO ORDINE DI x.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{|x|} \nexists$$

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{e^x - 1}{|x|} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{|e^x - 1|}{|x|}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{+(e^x - 1)}{+(x)} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-(e^x - 1)}{-(x)} = 1$$

$$e^x - 1 \overset{\circ}{=} x$$

$e^x - 1$ HA ORD. DI INF. 1 RISPETTO A x

CARATTERE LOGARITMICO DEGLI ORDINI DI INF.

i) l'ordine del prodotto di due inf. è un inf. che ha per ordine la somma degli inf.

ii) la pot. α-esima $(\alpha > 0)$ di un inf. di ordine β è un inf. di ordine $\alpha \cdot \beta$

iii) il quoziente di 2 inf. di ordine risp. α e β $(\alpha, \beta > 0)$ è un inf. se $\alpha > \beta$ ed ha per ordine $\alpha - \beta$.

$$\left[\frac{f^\alpha}{g^\beta}\right]$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{\overbrace{x^2}^{\text{ordine } 2} \cdot \overbrace{x}^{\text{ordine } 1}}^{\text{ordine } 3}}{\underbrace{x^2(1-\cos x)}_{\text{ordine } 4}} = \infty$$