5° LEZIONE 11/03/2021

CORSO MATEMATICA PROF. CARLO FURLANETTO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x + x^3}{\tan x - 1 + \cos x} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x = x + o(x) \\ \tan x = x + o(x) \\ \cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x) - \frac{1}{2}x + x^3}{\underbrace{x + o(x) \quad -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x + o(x)}{x + o(x)} =$$

$*$

$$= (\text{P.d.S.}) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x}{x} = \frac{1}{2}$$

OSS. $o(x) + x^3 = o(x)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x) + x^3}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{o(x)}{x} + \frac{x^{3}}{x} \right) = 0$$

$$o(x) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) = o(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{o(x)}{x} - \frac{\frac{1}{2}x^2}{x} + \frac{o(x^3)}{x} \right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} \cdot x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + \cos x + x^4 - 1}{x^5 - \tan^4 x + \operatorname{sen}(x^2)} \quad (*)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^4 x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^4 = 1^4 \to \tan^4 x = x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = \left[t = x^2\right] = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \to \operatorname{sen}(x^2) = x^2 + o(x^2)$$

$$(*) \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{\frac{1}{2}x^2} + o(x^2) \cancel{-\frac{1}{2}x^2} + o(x^2) + x^4}{x^5 - x^4 + o(x^4) + x^2 + o(x^2)} = (P.d.S.) = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$$

OSS. SUL P.d.S. [GENERALIZZAZIONE]

SE $f = f_1 + o(f_1)$ E $g = g_1 + o(g_1)$ $(P \to P_0)$ E LE FUNZIONI SONO DIVERSE DA ZERO IN UN INTORNO DI P_0, ESCLUSO AL PIÙ P_0, SI HA

$$\lim_{P\to P_0} \frac{f}{g} = \lim_{P\to P_0} \frac{f_1}{g_1}$$

PROP. IMPORTANTE

a) $\left(o(x)\right)^m = o(x^m) \quad m>0$

PER $x \to 0^+$

b) $x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o\left(x^{\alpha+\beta}\right) \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$

c) $o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o\left(x^{\alpha+\beta}\right) \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}^+$

d) $\sum_{i=1}^{m} o\left(x^{\alpha_i}\right) = o\left(x^\alpha\right) \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^+, i=1,\dots,m$ CON $\alpha = \min\{\alpha_i\}$

$\alpha_i \geq \alpha$

a) IP. $\lim_{P \to P_0} \frac{o(x)}{x} = 0$

$$\lim_{P \to P_0} \frac{\left[o(x)\right]^m}{x^m} = \lim_{P \to P_0} \left(\frac{o(x)}{x}\right)^m = 0$$

b) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^\alpha \cdot o(x^\beta)}{x^{\alpha+\beta}} = \lim_{x \to 0^+} \cancel{\frac{x^\alpha}{x^\alpha}} \cdot \underbrace{\frac{o(x^\beta)}{x^\beta}}_{0} = 0 \quad \text{(V)}$$

c) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta)}{x^{\alpha+\beta}} = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{o(x^\beta)}{x^\beta}}_{0} = 0$$

$$\frac{x^{\beta_1}}{x^{\alpha_1}} = \frac{1}{x^\alpha} \to \alpha_1 - \beta_1 = \alpha$$

$\beta_1 \geq 0$

d) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{o(x^{\alpha_1}) + o(x^{\alpha_2}) + \dots + o(x^{\alpha_m})}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \overbrace{\underbrace{\frac{o(x^{\alpha_1})}{x^{\alpha_1}}}_{0} \cdot \underbrace{x^{\beta_1}}_{0,1}}^{0} + \overbrace{\frac{o(x^{\alpha_2})}{x^{\alpha_2}} x^{\beta_2}}^{0} + \dots +$$

$$+ \underbrace{\frac{o(x^{\alpha_m})}{x^{\alpha_m}} x^{\beta_m}}_{0} = 0$$

INFINITI

DEF. SIA $f:(I \subset \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$, P_0 D'ACC. PER I, (P_0 PUÒ ESSERE ANCHE $+\infty$, $-\infty$ O ∞) : SE

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = \infty$$

LA FUNZIONE SI DICE INFINITA IN P_0.

ES.

$\tan x$ È UN INFINITO IN $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\frac{1}{x}$ -- -- -- -- 0

$\ln x$ -- -- -- -- 0^+

e^x -- -- -- -- $+\infty$

ALCUNE PROPRIETÀ DEGLI INFINITI

a) f È UN INFINITO SE E SOLO SE LO È $|f|$

b) SE f, g SONO DEFINITE IN UN INTORNO I DI P_0, ESCLUSO AL PIÙ P_0, SE $|g(P)| \geq |f(P)|$ $\forall P \in I \setminus \{P_0\}$ E SE f È INFINITA IN P_0, ALLORA ANCHE g È

INFINITA IN P_0

DIM: a) ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATO CHE

$$\lim_{P \to P_0} f = \infty \iff \lim_{P \to P_0} |f| = \infty$$

b) SE $|g(P)| \geq |f(P)|$ IN $I \setminus \{P_0\}$ E

$\lim_{P \to P_0} |f(P)| = +\infty$ ALLORA PER

TEO. CONFRONTO $\lim_{P \to P_0} |g(P)| = +\infty$, QUINDI

$|g|$ È UN INFINITO IN P_0, MA ALLORA

ANCHE g È UN INFINITO IN P_0 PER LA

PROP. a)

DEF. SE f E g SONO DEFINITE NELLO STESSO INSIEME I, ESCLUSO AL PIÙ P_0, E SONO ENTRAMBE INFINITE IN P_0, SI DICONO INFINITI SIMULTANEI IN P_0

CONFRONTO E ORDINAMENTO FRA INFINITI

NOTANDO CHE, SE $f(P)$ È UN INFINITO IN P_0, ALLORA $\frac{1}{f(P)}$ È UN INFINITESIMO IN P_0, TUTTA LA TEORIA DEL CONFRONTO TRA INFINITI E DELL'ORDINE RISPETTO AD UN INFINITO DI CONFRONTO SI PUÒ RICAVARE DA QUELLA DEGLI INFINITESIMI.

RICHIAMIAMO I FATTI SALIENTI.

DATI 2 INFINITI SIMULTANEI f E g SE

$$\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f}{g} \right| = L \neq 0$$

SI DICE CHE f E g HANNO LO STESSO ORDINE $\left(f \overset{\infty}{=} g \right)$

SE $\lim_{P\to P_0} \frac{f}{g} = \begin{cases} \infty & f \overset{\infty}{>} g \quad (f \text{ HA ORDINE MAGGIORE}) \\ 0 & f \overset{\infty}{<} g \quad (f \text{ -- -- MINORE}) \end{cases}$

IN QUESTI 3 CASI GLI INFINITI SI DICONO CONFRONTABILI, ALTRIMENTI (SE $\lim \left|\frac{f}{g}\right|$ NON ESISTE) SI DICONO NON CONFRONTABILI.

[VALGONO LE OSS. GIÀ FATTE PER GLI INFINITESIMI OVVERO $\lim \left|\frac{f}{g}\right| = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ EQUIVALE A $\lim \frac{f}{g} = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$, MENTRE $\lim \frac{f}{g} = L \neq 0 \Rightarrow \lim \left|\frac{f}{g}\right| = |L|$, MENTRE $\lim \left|\frac{f}{g}\right| = L \not\Rightarrow \lim \frac{f}{g}$ ESISTENTE]

DEF. SE f E g SONO INFINITI SIMULTANEI IN P_0, SI DICE CHE f HA ORDINE $\alpha \in \mathbb{R}^+$ RISPETTO A g SE $f \overset{\infty}{=} |g|^\alpha$, CIOÈ SE

$$\lim_{P\to P_0} \left|\frac{f(P)}{|g(P)|^\alpha}\right| = \lim_{P\to P_0} \frac{|f(P)|}{|g(P)|^\alpha} = L \neq 0$$

ESEMPIO

$f(x) = \sqrt{x^4+1}$ HA ORDINE DI INFINITO 2 RISPETTO

A $g(x)=x$ PER $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{|x|^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt{x^4}}^{|x^2|}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\overbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}^{1}}{\cancel{x^2}} = 1 \ (\neq 0)$$

$\frac{1}{x^4} \to 0$

$|x^2| = |x|^2 = x^2 \qquad \sqrt{x^2} = |x|$

$L = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4+x^2}{3\,2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3\,2x} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^4+x^2}{3\,2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{3\,2x}$$

PROP.

SE f_1 E f_2 SONO INFINITI IN P_0 CON $f_1 \overset{\infty}{>} f_2$, LA SOMMA $f = f_1 + f_2$ È UN INFINITO CON LO STESSO ORDINE DI INFINITO DI f_1 (HA ORDINE 1 RISPETTO f_1)

$f_1 \overset{\infty}{>} f_2$

DIM: $$\lim_{P\to P_0} \frac{f_1+f_2}{f_1} = \lim_{P\to P_0} \left(\overbrace{\frac{\cancel{f_1}}{\cancel{f_1}}}^{1} + \underbrace{\frac{f_2}{f_1}}_{0} \right) = 1 \ ✓$$

OSS.

SIA $\lim_{P \to P_0} \frac{f}{g} = L \neq 0$, PONENDO $\frac{f}{g} - L = \sigma$, σ

RISULTA UN INFINITESIMO IN P_0 E SI OTTIENE QUINDI

$$f = L \cdot g + g \cdot \sigma$$

QUINDI SE f E g SONO INFINITI SIMULTANEI

CON $\lim_{P \to P_0} \frac{f}{g} = L \neq 0$ SARÀ $f \overset{\infty}{=} g$ E $L \cdot g$

SI DIRÀ ANCORA PARTE PRINCIPALE DI f,

COME PER GLI INFINITESIMI. SU $g \cdot \sigma$ NON

POSSIAMO DIRE ANCORA NULLA ESSENDO UNA

FORMA INDETERMINATA $\infty \cdot 0$.

ESEMPI $\qquad f = L \cdot g + g \cdot \sigma$

$f(x) = x^2 + 3x$ HA ORDINE 2 RISPETTO x PER $x \to +\infty$

PARTE PRINCIPALE : $1 \cdot x^2$ $\quad L = 1$

A CUI È SOMMATA $3x$, INFINITO $3x \overset{\infty}{<} x^2$

$f(x) = x^2 + 3\sin x$ HA ORDINE 2 RISPETTO x PER $x \to +\infty$

PARTE PRINCIPALE : x^2

A CUI È SOMMATA $g \cdot \sigma = \sin x$ CHE NON HA LIMITE PER $x \to +\infty$

$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ HA ORDINE 2 RISPETTO x PER $x \to +\infty$

PARTE PRINCIPALE : x^2

A CUI È SOMMATA $g \cdot \sigma = \frac{1}{x}$ INFINITESIMO PER $x \to +\infty$

$f(x) = x^2 + 1 \ldots$

IN GENERALE SARÀ SEMPRE $g \cdot \sigma = o(g)$ PERCHÉ

$$\lim_{P \to P_0} \frac{g \cdot \sigma}{g} = \lim_{P \to P_0} \sigma = 0$$

QUINDI COME PER GLI INFINITESIMI VALE LA

$\boxed{\text{DECOMPOSIZIONE FONDAMENTALE :}}$

$$f = L \cdot g + o(g)$$

DEF. SE h È $o(g)$ IN P_0, CON g INFINITA IN P_0, (ANCHE SE h POTREBBE NON ESSERLO) DIREMO CHE h È UN INFINITO DI ORDINE INFERIORE.

$h(x)=2$ $\quad 2=o(x) \quad x\to+\infty \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x}=0$

POSSIAMO COSÌ DIRE CHE UN INFINITO SI SPEZZA NELLA SUA PARTE PRINCIPALE E IN UN INFINITO DI ORDINE INFERIORE.

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE

SIANO f_1, f_2, g_1 E g_2 INFINITI SIMULTANEI IN P_0, CON $f_1 \overset{\infty}{>} f_2$ E $g_1 \overset{\infty}{>} g_2$, ALLORA

$$\lim_{P\to P_0} \frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} = \lim_{P\to P_0} \frac{f_1}{g_1}$$

$f_2 = o(f_1)$

$g_2 = o(g_1)$

QUINDI IN QUESTO CASO SI TRASCURANO GLI INFINITI DI ORDINE INFERIORE

LA DIM. SI RICONDUCE ALLA GENERALIZZAZIONE DEL

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE VISTA AD INIZIO ORA. INFATTI NELLE IPOTESI POSTE SI HA

$$f_2 = o(f_1), \quad g_2 = o(g_1).$$

$$f = f_1 + f_2 = f_1 + o(f_1) \qquad g = g_1 + g_2 = g_1 + o(g_1)$$

ES. $$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+x} + x$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{\underset{\overset{\parallel}{-x}}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{|x|}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{|x|}} = 1$$

$$\sqrt{x^2+x} \overset{\infty}{=} x$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\underset{\overset{\parallel}{-x}}{|x|}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}_{1}+\underbrace{1}_{1}\right)}_{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x\sin x}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}+\frac{1}{2}x\sin x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{2}x\sin x}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}x\sin x}{\underset{\overset{\parallel}{x}}{|x|}\sqrt{1+\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2}\cancel{x}\sin x}{\cancel{x}\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{0}}}_{1}+1\right)}_{2}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln x}{\sqrt{1+\frac{\frac{1}{2}\ln x}{x}}+1}$$ ESISTE? NO

SUPPONGO $= L \in \mathbb{R}$ $\quad \ln x = 2L\left(\sqrt{1+\frac{\frac{1}{2}\ln x}{x}}+1\right) \to 4L$

$= \infty$ ASSURDO

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{\frac{1}{2}\ln x}{x}}+1 = 2$$