Carlo Furlanetto
carlo.furlanetto@didattica.liceogrigoletti.edu.it

1 INTRODUZIONE

In questo breve documento vengono sintetizzati i principali aspetti analizzati nel corso dedicato agli alunni che partecipano al progetto Eccellenza del comune di Pordenone per la parte riguardante la matematica. Quest'anno il corso e' stato realizzato per tutti gli interessati ad approfondire le conoscenze di analisi relative ai limiti, con l'obiettivo di completare la loro preparazione specifica in funzione di una futura iscrizione ad un corso di laurea di natura scientifica.

In questo documento vengono riportate le principali definizioni, osservazioni, proprieta' e teoremi analizzati nel corso senza riportarne le dimostrazioni, che sono state sviluppate in modo completo a lezione. Lo scopo di questo documento e' quindi quello di riportare sinteticamente tutti i risultati importanti ottenuti a lezione in modo da facilitarne il ripasso e la memorizzazione. Rimane sottointeso che la piena comprensione di quanto contenuto in queste poche righe puo' essere raggiunta solo a partire da una piena comprensione delle dimostrazioni dei fatti qui esposti.

Si consiglia di completare lo studio dei limiti con l'analisi di un buon libro di testo. In particolare questo corso e' stato realizzato seguendo la traccia del percorso proposto nel testo *LIMITI, complementi ed esercizi di analisi matematica* di O. Stefani e A. Zanardo.

2 INFINITESIMI

Definizione Sia $f : (I \subset \Re) \longrightarrow \Re$ e sia P_0 punto d'accumulazione per I (P_0 puo' essere anche uno dei simboli $+\infty$, $-\infty$ o ∞).

Se $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = 0$, f si dice infinitesima in P_0.

Definizione Se f e g sono definite nello stesso insieme (escluso al piu' P_0) e sono entrambe infinitesime in P_0, si dicono infinitesimi simultanei in P_0.

Ipotesi di non annullamento Esiste un intorno di P_0 in cui $f(P) \neq 0$, escluso al piu' P_0 stesso.

D'ora in avanti supporremo l'ipotesi di non annullamento verificata per tutti gli infinitesimi in P_0.

Definizione Dati due infinitesimi simultanei in P_0, f e g, si dice che f e g hanno lo stesso ordine di infinitesimo se

$$\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f(P)}{g(P)} \right| = L \neq 0$$

e si scrive $f =^i g$;

se invece

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = 0$$

si dice che f ha ordine d'infinitesimo superiore a g e si scrive $f >^i g$;

se invece

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \infty$$

si dice che f ha ordine d'infinitesimo inferiore a g e si scrive $f <^i g$.

Proposizione $\lim\limits_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = L \neq 0$ e' equivalente a dire che esiste un intorno I di P_0 in cui, escluso al piu' P_0 stesso, $f(P)$ e' somma di due infinitesimi, il primo dei quali e' $Lg(P)$ e il secondo e' un infinitesimo simultaneo di ordine superiore a g.

Definizione Siano f e g infinitesimi simultanei in P_0. Si dice che f ha ordine $\alpha \in \Re^+$ rispetto a g se f ha lo stesso ordine di $|g|^\alpha$.

Proposizione Gli ordini di infinitesimo hanno carattere logaritmico; piu' precisamente:

1. l'ordine del prodotto di due infinitesimi e' un infinitesimo che ha per ordine la somma degli ordini;
2. la potenza α-esima ($\alpha > 0$) di un infinetismo di ordine β e' un infinitesimo di ordine $\alpha\beta$;
3. il quoziente di due infinitesimi di ordini rispettivi α e β e' un infinitesimo se α (ordine del numeratore) e' maggiore di β (ordine del denominatore) ed ha per ordine la differenza degli ordini $\alpha - \beta$.

Carlo Furlanetto
carlo.furlanetto@didattica.liceogrigoletti.edu.it

Proposizione Siano f_1 e f_2 infinitesimi simultanei; se $f_2 >^i f_1$, allora $(f_1 + f_2)$ ha lo stesso ordine di f_1.

Osservazione Se f_1 e f_2 sono infinitesimi simultanei dello stesso ordine, $(f_1 + f_2)$ non e' necessariamente anch'esso del medesimo ordine; si puo' solo dire che la somma e' di ordine non inferiore a quello dei singoli addendi.

Principio di sostituzione Siano f_1 e f_2 infinitesimi simultanei in P_0 con $f_2 >^i f_1$ e g_1 e g_2 infinitesimi simultanei con $g_2 >^i g_1$, allora:

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f_1(P) + f_2(P)}{g_1(P) + g_2(P)} = \lim_{P \to P_0} \frac{f_1(P)}{g_1(P)}$$

e se uno dei due limiti non esiste non esiste nemmeno l'altro.

3 ASINTOTICITA'

Definizione Siano f e g due funzioni definite nello stesso insieme $I \subset \Re$ e sia P_0 punto di accumulazione per I. Sia inoltre vera l'ipotesi di non annullamento. Se

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = 1$$

si dice che f e' asintotica a g in P_0 e si scrive $f \sim g$.

Nota Bene Non si e' supposto che f e g siano infinitesimi in P_0.

Proprieta' Se $f \sim g$ in P_0, allora

$$\lim_{P \to P_0} f(P)h(P) = \lim_{P \to P_0} g(P)h(P)$$

e se uno dei due limiti non esiste non esiste nemmeno l'altro.

4 PARTE PRINCIPALE

Definizione Siano f e g infinitesimi simultanei e sia

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = L \neq 0$$

allora Lg si dice parte principale di f rispetto a g.

Proprieta' Sia Lg la parte principale di f rispetto a g, allora valgono le seguenti proprieta':

1. f e g sono dello stesso ordine,
2. $f \sim Lg$,
3. $f = Lg + g\sigma$ con σinfinitesimo simultaneo di f e g,
4. f differisce da Lg per un infinitesimo, $g\sigma$, di ordine superiore a f.

Osservazione Quindi nel principio di sostituzione ottengo che nel rapporto fra 2 infinitesimi posso sostituire numeratore e denominatore con le loro parti principali!

5 "o" O PICCOLO

definizione Siano f e g due funzioni definite in un intorno I di P_0, escluso al piu' P_0 stesso, e sia g diversa da zero in $I - \{P_0\}$.

Se

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = 0$$

si dice che f e' un *o piccolo* di g per P che tende a P_0 o in P_0, e si scrive "f e' $o(g)$".

Notare che non e' necessario supporre f o g infinitesime.

Generalizzazione del Principio di sostituzione Sia $f = f_1 + o(f_1)$ e $g = g_1 + o(g_1)$, $(P \to P_0)$ e le funzioni interessate siano diverse da zero in un intorno di P_0, escluso al piu' P_0 stesso. Si ha allora

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \lim_{P \to P_0} \frac{f_1(P)}{g_1(P)}.$$

6 INFINITI

Definizione Sia $f : (I \subset \Re) \longrightarrow \Re$ e sia P_0 punto d'accumulazione per I (P_0 puo' essere anche uno dei simboli $+\infty$, $-\infty$ o ∞).

Se $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = \infty$, f si dice infinita in P_0, si puo' anche dire che f e' un infinito in P_0.

Definizione Dati due infiniti simultanei in P_0, f e g, si dice che f e g hanno lo stesso ordine di infinito se

$$\lim_{P \to P_0} \left| \frac{f(P)}{g(P)} \right| = L \neq 0$$

e si scrive $f =^{\infty} g$;

se invece

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \infty$$

si dice che f ha ordine d'infinito superiore a g e si scrive $f >^{\infty} g$;

se invece

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = 0$$

si dice che f ha ordine d'infinito inferiore a g e si scrive $f <^{\infty} g$.

Proposizione Se f_1 e f_2 sono infinite e $f_1 >^{\infty} f_2$, la somma $f = f_1 + f_2$ ha lo stesso ordine di infinito di f_1.

Parte principale Sia ora $\lim\limits_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = L \neq 0$ con $f =^{\infty} g$. Ponendo $\frac{f}{g} - L = \sigma$, σ risulta infinitesimo, e si ottiene:

$$f = Lg + g\sigma$$

Lg si chiama ancora parte principale di f rispetto a g, attenzione che pero' $g\sigma$ e' forma indeterminata $\infty \cdot 0$.

Risulta comunque $g\sigma = o(g)$, perche' $\lim\limits_{P \to P_0} \frac{g\sigma}{g} = 0$.

Quindi, come per gli infinitesimi, vale la decomposizione

$$f = Lg + o(g)$$

.

Principio di sostituzione infiniti Siano f_1 e f_2 infiniti simultanei, come g_1 e g_2 in P_0, con $f_1 >^{\infty} f_2$ e $g_1 >^{\infty} g_2$, allora

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f}{g} = \lim_{P \to P_0} \frac{f_1}{g_1}$$

e se uno dei due limiti non esiste non esiste nemmeno l'altro.

7 TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

Teorema di De l'Hospital Siano f e g funzioni continue e derivabili in un interno di x_0, escluso al piu' x_0 stesso, e siano g e g' diverse da zero nell'intorno considerato, escluso al piu' in x_0 stesso, e sia

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0,$$

oppure sia

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty;$$

ed esista inoltre

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

In tali ipotesi esiste anche

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e tale limite vale L.

Il teorema e' valido anche se L o x_0 o entrambi sono sostituiti da uno dei simboli $+\infty$, $-\infty$ o ∞.

8 SVILUPPI ASINTOTICI

Formula di Taylor Sia $f \in C^{n-1}(a,b)$ (ovvero f derivabile con derivata continua almeno $n-1$ volte) e sia $x_0 \in (a,b)$. Allora esiste uno ed un solo polinomio, funzione dell'incremento $x - x_0$ di grado $n-1$, che approssima la funzione a meno di un infinitesimo di ordine superiore a $n-1$ rispetto all'incremento.

In formule:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n(x), \forall x \in (a,b)$$

con

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

e quindi $R_n(x)$ e' un $o((x - x_0)^{n-1})$ per $x \to x_0$.

In particolare, se $x_0 = 0$, la formula prende il nome di formula di Mac Laurin.

Carlo Furlanetto
carlo.furlanetto@didattica.liceogrigoletti.edu.it

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + o(x^{10}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + o(x^{10}) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + o(x^n) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\operatorname{arctanh} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

con

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$$

Figura 1: Principali formule di Mac Laurin