6° LEZIONE

18/03/2021

CORSO MATEMATICA PROF. CARLO FURLANETTO

TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

SIANO f E g FUNZIONI CONTINUE E DERIVABILI NELL'INTERVALLO $]a,b[$, ESCLUSO AL PIÙ x_0, SIANO g E g' DIVERSE DA 0 IN UN INTORNO DI x_0 E SIA a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

OPPURE SIA b) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$;

ED ESISTA INOLTRE $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

IN TALI IPOTESI ESISTE ANCHE $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ED È

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = L.$$

[IL TEOREMA CONTINUA A VALERE ANCHE SE L E x_0 O ENTRAMBI SONO SOSTITUITI DA ∞ O $\pm\infty$]

N.B. IL TEOREMA DÀ SOLO UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE, CIOÈ PUÒ ESISTERE $\lim f/g$ SENZA CHE ESISTA $\lim f'/g'$.

ESERCIZI (IMPORTANTE)

1) e^x È PER $x \to +\infty$ UN INFINITO DI ORDINE SUPERIORE A QUALSIASI POTENZA NATURALE DI x.

INFATTI $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = (H) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n x^{n-1}} = (\text{SE } n>1, H)$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} = (\text{CON } n \text{ APPLICAZIONI DI } H) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$

2) e^x È PER $x \to +\infty$, UN INFINITO DI ORDINE SUPERIORE A x^α, PER QUALSIASI α POSITIVO.

POSSIAMO SCRIVERE x^α AL POSTO DI $|x|^\alpha$ ESSENDO $x \to +\infty$ POSSIAMO CONSIDERARE INTERVALLI CON $x>0$.

PER LA PROPRIETÀ ARCHIMEDEA:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^+ \ \exists \bar{m} \in \mathbb{N} : \bar{m} > \alpha;$$

QUINDI, PER 1) $e^x \overset{\infty}{>} x^{\bar{m}} > x^\alpha \rightarrow e^x \overset{\infty}{>} x^\alpha$

3) e^x È PER $x \to -\infty$ UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A QUALSIASI POTENZA NATURALE DI $1/x$ $\left[\frac{e^x}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{e^{-x}}\right]$

4) e^x È PER $x \to -\infty$ UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A $\left|\frac{1}{x}\right|^\alpha$, PER QUALSIASI $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

5) ADATTARE 1), 2), 3) E 4) PER e^{-x} E PER a^x, $a>1$

NATURALMENTE NON ESISTE UN INFINITO "PIÙ GRANDE DI TUTTI" $\left(x \cdot e^x \overset{\infty}{>} e^x\right)$

6) TROVARE L'ORDINE DI INFINITESIMO DI $\operatorname{sen} x - x$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^\alpha} = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\alpha x^{\alpha-1}} = \overset{(x\to 0)}{\begin{cases} -\frac{1}{12} & \alpha = 3 \\ 0 & 0<\alpha<3 \\ \infty & \alpha>3 \end{cases}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = -\frac{1}{6} \quad \text{ORDINE } 3$$

QUINDI $\operatorname{sen} x - x = -\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \Rightarrow \operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$

? $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^\alpha} = \frac{1}{5!}$ $(\alpha = 5)$

7) TROVARE L'ORDINE DI INFINITESIMO DI $\ln(1+x)-x$ PER $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}{}^{(*)} \frac{\ln(1+x)-x}{x^\alpha} = (H) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{1-1-x}{\alpha x^{\alpha-1}(1+x)} =$$

$$\boxed{D(\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{-x}{\alpha x^{\alpha-1}}}_{-\frac{1}{\alpha x^{\alpha-2}}}\cdot\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{1}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{SE } \alpha=2 \\ 0 & 0<\alpha<2 \\ \infty & \alpha>2\end{cases}$$

$(*) = -\frac{1}{2}$ $\quad \ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ $\quad \left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)$

8) IMPORTANTE

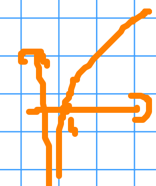
PER $x\to 0^+$, $x^\alpha \ln x$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$ È UN INFINITESIMO

DI CUI SI CHIEDE L'ORDINE

$$\lim_{x\to 0^+} \underbrace{x^\alpha}_{0}\underbrace{\ln x}_{-\infty} = 0\ ? \quad \text{FI}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\ln x}^{-\infty}}{\underbrace{x^{-\alpha}}_{-\infty}} = (H) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^\alpha}{\alpha} = 0 \quad \forall \alpha>0$$



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^\alpha \ln x}{x^\beta} = \lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-\beta}\ln x = \begin{cases} 0 & \alpha-\beta>0 \\ \dfrac{\ln x}{x^{\beta-\alpha}} \to \dfrac{\infty}{0}\to\infty & \alpha-\beta\le 0\end{cases}$$

$\beta>0$

NE SEGUE CHE $x^\alpha \ln x$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, È, PER $x\to 0^+$, UN INFINITESIMO DI

ORDINE, RISPETTO A x, INFERIORE AD α, MA SUPERIORE AD

OGNI REALE β MINORE DI α.

[QUINDI I NUMERI REALI "NON BASTANO" PER ASSEGNARE UN ORDINE A TUTTI GLI INFINITESIMI RISPETTO ALLA STESSA FUNZIONE CAMPIONE, AD ESEMPIO $x \ln x$ HA ORDINE MINORE DI 1, MA MAGGIORE DI TUTTI I NUMERI REALI CHE VENGONO PRIMA DI 1]

4) $\ln x$ PER $x \to +\infty$ È UN INFINITO DI ORDINE INFERIORE A QUALSIASI POTENZA x^α, $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = (H) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

V

QUINDI SEGUE CHE $x^\alpha \ln x$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$, PER $x \to +\infty$ È UN INFINITO DI ORDINE MAGGIORE DI α, MA MINORE DI OGNI NUMERO MAGGIORE DI α.

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

$$e^{\ln a} = a \qquad \ln e^a = a \qquad a = f(x)^{g(x)} \qquad a \log_a a = \log_a a^n$$

10) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\cot x} \overset{FI}{=} 1^{\infty} = \lim_{x\to 0} e^{\overset{\infty}{\cot x}\cdot \underbrace{\ln\left(\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\right)}_{0}}$ $\qquad \overset{FI}{\overbrace{e^{\infty\cdot 0}}}$

STUDIO LA FORMA INDETERMINATA ALL'ESPONENTE

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\tan x} = \left[\tan x \sim x\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x} = (H)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right)}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \left[\sin x \sim x\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = (H) = \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{\cos x} - \cancel{x}\sin x - \cancel{\cos x}}{2\cancel{x}} = 0$$

$$\Rightarrow e^{0} = 1$$

11) $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^3)^{\frac{1}{\sin^2 x}} - 1}{\sin x}$$

CONTROLLO PRIMA SE È FORMA INDETERMINATA

$$\lim_{x\to 0}(1+x^3)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\ln(1+x^3)} \qquad E$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)}{\sin^2 x} = \begin{pmatrix}\ln(1+x^3)\sim x^3\\ \sin^2 x\sim x^2\end{pmatrix} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2} = 0$$

QUINDI F.I. $0/0$ (X CASA)

ATTENZIONE: UNO SVOLGIMENTO DEL TIPO

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x}}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{x^2}{x^2}}-1}{x} = 1$$

CHE SFRUTTA $\sin^2 x \sim x^2$ E $\ln(1+x^2) \sim x^2$ ANCHE SE (IN QUESTO CASO) PORTA AL MEDESIMO RISULTATO NON È CORRETTO PERCHÈ SI SOSTITUISCONO FUNZIONI ASINTOTICHE NELL'ARGOMENTO DI UNA FUNZIONE (E QUESTO È SCORRETTO) CHE A SUA VOLTA È FUNZIONE ARGOMENTO (ULTERIORMENTE ERRATO)

SVILUPPI ASINTOTICI

FORMULE DEL TIPO $\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ SI CHIAMANO

SVILUPPI ASINTOTICI

TEOREMA (FORMULA DI TAYLOR)

SIA $f \in C^{n-1}(a,b)$ [DERIVABILE $n-1$ VOLTE (O PIÙ) CON DERIVATE CONTINUE IN $]a,b[$] E SIA $x_0 \in]a,b[$.

ALLORA ESISTE UNO ED UN SOLO POLINOMIO, FUNZIONE DI $(x-x_0)$, DI GRADO $n-1$, CHE APPROSSIMA LA FUNZIONE A MENO DI UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A $n-1$ RISPETTO $(x-x_0)$. IN FORMULE

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + R_n(x), \quad \forall x \in]a,b[$$

OVE $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0$

$$\left(o\left((x-x_0)^{n-1}\right)\right)_{x\to x_0}$$

IN PARTICOLARE, SE $x_0=0$, LA FORMULA PRENDE IL NOME DI FORMULA DI MAC LAURIN

(TAYLOR – MAC LAURIN)

$$e^x = \overset{e^0}{1} + \overset{\frac{e^0 \cdot x}{1!}}{x} + \overset{\frac{e^0\cdot x^2}{2!}}{\frac{x^2}{2!}} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{sen} x = x \overset{0}{-} \frac{x^3}{3!} \overset{0x^2}{+} \frac{x^5}{5!} \overset{0x^4}{+} \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = \frac{\cos(0)}{1} + \underbrace{\frac{(-\operatorname{sen}(0))\, x^1}{1!}}_{0} + \underbrace{\frac{\overset{-1}{(-\cos(0))}\, x^2}{2!}}_{-\frac{x^2}{2}} + 0x^3 + \frac{x^4}{4!}$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$\operatorname{ch} x =$ X CASA

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + o(x^n)$$

$\tan x =$ X CASA

$\operatorname{arctan} x =$ X CASA

$\operatorname{th} x =$ X CASA

$\arcsin x =$ x CASA

$(1+x)^\alpha =$ x CASA

ESEMPI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{x+o(x^3)\ \ -\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}{\operatorname{sen} x} - \overset{x+o(x)}{\operatorname{sh} x}}{e^x - x - \operatorname{ch} x}$$

x CASA

N.B. POICHÉ $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$, È VERO

ANCHE $e^{\operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^3 x}{6} + o(\operatorname{sen}^3 x)$ $(*)$

INFATTI SI VERIFICA FACILMENTE CHE SE

$$\lim_{t \to 0} \frac{o(t^7)}{t^7} = 0, \text{ ALLORA } \lim_{x \to 0} \frac{o(\sin^7 x)}{\sin^7 x} = 0$$

SI NOTI CHE PERÒ (*) NON È UNA FORMULA DI TAYLOR-MACLAURIN, PERCHÉ NON È UN POLINOMIO.