SETTIMA LEZIONE 25/03/2021

CORSO ECCELLENZA MATEMATICA PROF. FURLANETTO CARLO

FORMULA DI TAYLOR: DIMOSTRAZIONE

1) LEMMA.

SIA $m \geq 1$; SIA $R(x) \in C^{m-1}(a,b)$ E $x_0 \in]a,b[$ ED ESISTA $R^{(m)}(x_0)$.

SONO ALLORA EQUIVALENTI:

a) $R(x)$ È UN INFINITESIMO PER $x \to x_0$, DI ORDINE SUPERIORE A $m-1$ RISPETTO A $x-x_0$.

(NEL CASO $m=1$ DIRE CHE $R(x)$ È UN INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A $(x-x_0)^0$ SIGNIFICA DIRE CHE $R(x)$ È INFINITESIMO)

b) $R(x_0) = R'(x_0) = \dots = R^{(m-1)}(x_0) = 0$

c) $R(x) = \dfrac{R^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + (x-x_0)^m \delta(x)$, CON $\delta(x)$ FUNZIONE CONTINUA IN $]a,b[$, INFINITESIMA IN x_0.

d) $R(x)$ È UN INFINITESIMO PER $x \to x_0$ DI ORDINE ALMENO m RISPETTO $(x-x_0)$; PIU'

PRECISAMENTE È DI ORDINE m SE $R^{(m)}(x_0) \neq 0$, È DI ORDINE SUPERIORE AD m SE $R^{(m)}(x_0) = 0$.

DIMOSTRAZIONE

a) $\Rightarrow$ b) USIAMO IL PRINCIPIO D'INDUZIONE

a) $\Rightarrow$ b) È VERO PER $m=1$

INFATTI $$\underset{\text{INF.}}{0} = \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{\underbrace{(x-x_0)^{1}}_{1}} = \lim_{x \to x_0} R(x) \underset{\text{CONTINUA}}{=} R(x_0)$$

SIA ORA VERO CHE a) $\Rightarrow$ b) PER $m-1$, $m>1$, DIMOSTRIAMO CHE SE SI SUPPONE VERA a) PER m SEGUE CHE ANCHE b) È VERA PER m.

SE a) È VERA PER m, CIOÈ $R(x)$ È DI CLASSE $C^m[a,b]$ ED È INFINITESIMA DI ORDINE SUPERIORE A m RISPETTO AD $x-x_0$, ALLORA A MAGGIOR RAGIONE $R(x)$ È DI CLASSE C^{m-1} ED È INFINITESIMA DI ORDINE SUPERIORE AD $m-1$.

PERTANTO PER L'IPOTESI INDUTTIVA SI HA

$$R(x_0) = R'(x_0) = \dots = R^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

ORA $\underset{\text{IP. a)}}{0} = \lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = (H) = \dots = (H) = \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n)}(x)}{n!} \underset{\text{CONTINUA}}{=} \frac{R^{(n)}(x_0)}{n!}$

QUINDI ANCHE $R^{(n)}(x_0) = 0$, QUINDI b) VERA PER n.

b) $\Rightarrow$ c) CONSIDERIAMO $\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n}$

DATE LE IPOTESI POSSIAMO APPLICARE DE L'HOSPITAL $n-1$ VOLTE OTTENENDO:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = (H) = \dots = (H) = \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)}$$

ORA $\lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)} \underset{R^{(n-1)}(x_0)=0}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}(x) - R^{(n-1)}(x_0)}{(x-x_0)\,n!} \underset{\substack{R^{(n)}(x_0) \\ \text{ESISTE PER} \\ \text{IPOTESI}}}{=} \frac{R^{(n)}(x_0)}{n!}$

QUINDI $\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{R^{(n)}(x_0)}{n!}$

DA CUI POSTO $\sigma(x) = \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} - \frac{R^{(n)}(x_0)}{n!}$ PER $x \neq x_0$ E $\sigma(x_0) = 0$

E QUINDI c) VERA SEGUE DA b) VERA

c) $\Rightarrow$ d) È OVVIA, COME PURE d) $\Rightarrow$ a).

N.B. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE SE DALLE IPOTESI SI TOGLIE L'ESISTENZA DI $R^{(n)}(x_0)$, RIMANE VALIDA L'EQUIVALENZA TRA a) E b).

TEOREMA (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

SIA $n \geq 1$, SIA $f \in C^{n-1}(a,b)$, SIA $x_0 \in]a,b[$, ED ESISTA $f^{(n)}(x_0)$, ALLORA ESISTE UNO ED UN SOLO POLINOMIO DI GRADO $n-1$ FUNZIONE DELL'INCREMENTO $(x-x_0)$, CIOÈ DELLA FORMA

$$a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + a_{n-2}(x-x_0)^{n-2} + \dots + a_1(x-x_0) + a_0$$

CHE APPROSSIMA $f(x)$ IN $]a,b[$ A MENO DI UN INFINITESIMO PER $x \to x_0$ DI ORDINE SUPERIORE A $n-1$ RISPETTO AD $(x-x_0)$. I SUOI COEFFICIENTI SONO DATI DALLE FORMULE:

$$a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (\alpha)$$

QUINDI POSTO $R_m(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i$

SI HA $f(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x-x_0)^i + R_m(x) \quad (*)$

OVE $R_m(x)$ È INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A $m-1$ RISPETTO AD $(x-x_0)$, NON SOLO, MA NELLE NOSTRE IPOTESI SI HA ANCHE

$$R_m(x) = \frac{(x-x_0)^m}{m!} \left(f^{(m)}(x_0) + \delta_1(x) \right) \quad (**)$$

OVE $\delta_1(x)$ È CONTINUA ED INFINITESIMA IN x_0.

LA $(*)$ SI DICE FORMULA DI TAYLOR RELATIVA A $f(x)$ DI ORDINE m E DI PUNTO INIZIALE x_0, $R_m(x)$ SI DICE RESTO DELLA FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE m. $R_m(x)$ SCRITTO NELLA FORMA $(**)$ È NOTO COME RESTO DI PEANO.

DIMOSTRAZIONE:

POSTO $R_m(x) = f(x) - \left[a_{m-1}(x-x_0)^{m-1} + \ldots + a_1(x-x_0) + a_0 \right]$

SI HA CHE $R_m(x)$ VERIFICA LE IPOTESI DEL LEMMA A) _ È FACILE VEDERE CHE SI HA:

$$R_m^{(i)}(x) = f^{(i)}(x) - \left[(m-1)\cdots(m-i)\, a_{m-1} (x-x_0)^{m-i-1} + \dots + i!\, a_i \right],$$

in x_0 fa 0

$$i = 0, 1, \dots, m-1$$

DA CUI SI RICAVA:

$$R_m^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0) - i!\, a_i \,, \quad i = 0, 1, \dots, m-1;$$

ED È ANCHE $\quad R_m^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) \qquad (***)$

ORA IL LEMMA CI DICE CHE CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ $R_m(x)$ SIA INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE A $(x-x_0)^{m-1}$ È CHE $R^{(i)}(x_0) = 0$ PER $i = 1, \dots, m-1$, CHE NEL NOSTRO CASO DIVENTA: $\quad a_i = \dfrac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$, $i = 0, 1, \dots, m-1$

PER CUI (o) E (*) SONO DIMOSTRATE.

TENUTO CONTO DI (***) E DEL PUNTO C) DEL LEMMA, POSTO $g_1(x) = m! \cdot g(x)$, SEGUE SUBITO ANCHE (**)

$\square$

ESERCIZI

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} - 1}{\operatorname{sh} x} = (\operatorname{sh} x \sim x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\ln(1+x^3)} - 1}{x} = (H) =$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\ln(1+x^3)} \left(\frac{\frac{3x^2}{1+x^3}\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x\cos x \ln(1+x^3)}{\operatorname{sen}^4 x} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{e^{\frac{\ln(1+x^3)}{\operatorname{sen}^2 x}}}^{1}}{\underbrace{1+x^3}_{1}} \left(\frac{3x^2\operatorname{sen} x - 2(1+x^3)\cos x\ln(1+x^3)}{\operatorname{sen}^3 x} \right)$$

$$= \left(\begin{aligned} &3x^2\operatorname{sen} x = 3x^3 + o(x^3) \\ &2(1+x^3)\cos x \ln(1+x^3) = 2x^3 + o(x^3) \\ &\operatorname{sen}^3 x = x^3 + o(x^3) \end{aligned} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{3x^3 + o(x^3) - 2x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1$$

(P.d.S.)

SVILUPPO TAYLOR-MAC LAURIN DI $y = \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\operatorname{ch}(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1$ $\quad D\left[\operatorname{ch}(x)\right] = D\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$

$\operatorname{sh}(0) = 0$

$$D(\mathrm{sh}(x)) = D\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x) \qquad \mathrm{ch}(0)=1$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + 0 + 1\,\frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sh}\,x}{e^x - x - \mathrm{ch}\,x} = \left(\begin{aligned} &\mathrm{sen}\,x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &\mathrm{sh}\,x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &\mathrm{ch}\,x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \end{aligned}\right) =$$

F.I. $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x} - \cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4!} + o(x^3) + o(x^4)}$$

$$= (\text{P.d.S.}) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{6}} = -\frac{6}{3} = -2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,\mathrm{ch}\,x - x^4 - 2 - \mathrm{sen}^2 x}{2\,\mathrm{sen}^4 x + (\mathrm{sen}\,x - \mathrm{sh}\,x)^2} = \left(\begin{aligned} &\mathrm{ch}\,x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ &\mathrm{sen}\,x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &(\mathrm{sen}\,x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\ &\mathrm{sh}\,x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}\right)$$

$$\mathrm{sen}^4 x = x^4 + o(x^4)$$

$\mathrm{sen}\,t = t + o(t) \qquad t = x^4$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) - x^4 - \cancel{2} - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4) + \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{12} + o(x^4) - x^4 + \frac{x^4}{3} + \cancel{o(x^4)}}{2x^4 + o(x^4) + \underbrace{\left(-\frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2}_{+\frac{x^6}{9} - \underbrace{\frac{2}{3}x^3 o(x^3)}_{o(x^6)} + o(x^6)}} \underset{\text{P.d.S.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{7}{12}\cancel{x^4}}{2\cancel{x^4}} = -\frac{7}{24}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\ln(1+x^2) - \operatorname{sh}^2 x}$$

$t = x^2$

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \to e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$e^{x^2} - 1 - x^2 = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \to \ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \to \operatorname{sh}^2 x = x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{5}{6}} = -\frac{3}{5}$$

CALCOLARE, AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}^+$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sh}^\alpha x - x + e^{-\frac{1}{x^2}}}{\tan^\alpha x}$$

$\operatorname{sh}^\alpha x \sim x^\alpha$ È DI ORDINE α

$-x$ È DI ORDINE 1

$e^{-\frac{1}{x^2}}$ È DI ORDINE SUP. A QUALSIASI POTENZA DI X

$$\tan^\alpha x \sim x^\alpha$$

(VEDIAMO L'ULTIMA AFFERMAZIONE PER POTENZE PARI DI X

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2k}} = \left(\frac{1}{x^2}=t\right) = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{-k}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^k}{e^t}=0$$

PER α QUALSIASI SI PROCEDE APPLICANDO LA PROP. ARCHIMEDEA)

QUINDI PER $0<\alpha<1$ IL NUM. È DI ORDINE α:

$0<\alpha<1$ (P.d.S.) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sinh^\alpha x}{\tan^\alpha x}=1$$

PER $\alpha=1$: $\sinh x - x = \frac{x^3}{6}+o(x^3)$ P.d.S. $\rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x^3}{6}}{x}=0$

PER $\alpha>1$: (P.d.S.) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x^\alpha}=-\infty$$

AL VARIARE DI $\alpha \in \mathbb{R}^+$, CALCOLARE

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x^\alpha)-x^\alpha+\sinh^3 x}{\tan^3 x+(1-\cos x)^\alpha}$$

ES.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}-\frac{1}{\arctan x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\arctan x}{1-e^{-x}}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen}x-e^{x^2}+1}{\operatorname{sen}^4 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\arctan x)\operatorname{sen}x}{1-\cos(x^2)}, \qquad \lim_{x\to 0}\left(\ln(1+x)+\cos^2 x\right)^{1/x}$$