4ª LEZIONE 04/03/2021

CORSO MATEMATICA PROF. CARLO FURLANETTO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\overset{x}{\wr\wr}}{\overbrace{\operatorname{sen} x + x}} + \overset{\overset{x^2}{\wr\wr}}{\overbrace{\tan^2 x}}}{\underset{\underset{x^{\frac{1}{2}}}{\wr\wr}}{\underbrace{\sqrt{x}}} + \underset{\underset{x}{\wr\wr}}{\operatorname{sen} x} + \underset{\underset{x^2}{\wr\wr}}{x^2} + \underset{\underset{x^3}{\wr\wr}}{\tan^3 x}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x}{x} = 2$$

$$\overset{(\text{P.d.S.})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x + x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \overset{2}{\boxed{\left(\frac{\operatorname{sen} x + x}{x}\right)}} \cdot \sqrt{x} = 0$$

$\operatorname{th} x + x^2 \sim x^2 \quad (x \to +\infty)$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{th} x + x^2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{th} x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{e^x}\left(1 - \overset{0}{e^{-2x}}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \underset{0}{e^{-2x}}\right)} \cdot \overset{0}{\boxed{\frac{1}{x^2}}} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\| $$

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\overset{0}{\boxed{\frac{\operatorname{th} x}{x^2}}} + \overset{1}{\boxed{\frac{x^2}{x^2}}} \right) = 1 \; \textcircled{v}$$

$$\frac{1}{x + \cos x} \sim \frac{1}{x} \quad (x \to +\infty)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \cdot (x + \cos x)$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to +\infty} \overset{1}{\boxed{\frac{x}{x}}} + \overset{0}{\boxed{\frac{\cos x}{x}}} = 1 \; \textcircled{v}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\overbrace{\cos x}^{\text{LIMITATO}}}{\underbrace{x}_{+\infty}} = 0$$

N.B. NON SI È SUPPOSTO CHE f E g SIANO INFINITESIMI IN P_0. AD ESEMPIO $f(x)=2-x^2$ E $g(x)=2\cos x$ SONO ASINTOTICHE PER $x\to 0$ SENZA ESSERE INFINITESIME.

SE f E g SONO AS. E INFINITESIME IN P_0, ALLORA SONO INFINITESIMI DELLO STESSO ORDINE; NON È VERO IL VICEVERSA.

AD ES. $\sin 2x$ E x SONO INFINITESIMI DELLO STESSO ORDINE IN ZERO, MA NON SONO ASINTOTICHE $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2$

VERIFICARE CHE:

$\operatorname{ch} x \sim \cos x \quad (x\to 0)$ $\qquad$ $\dfrac{1}{x}+x^2 \sim \dfrac{1}{x} \quad (x\to 0)$

$\dfrac{1}{x}+x^2 \sim x^2 \quad (x\to +\infty)$ $\qquad$ $\operatorname{th} x + x^2 \sim x \quad (x\to 0)$

$\ln(\operatorname{sh} x + 2) \sim x \quad (x\to +\infty)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}x}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{e^{x}+e^{-x}}^{2}}{2\underbrace{\cos x}_{1}}=\frac{2}{2}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}+x^{2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\overset{0}{x^{3}}}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x}+x^{2}}{x^{2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+x^{3}}{x^{3}}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}+x^{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\overset{\frac{1}{2}\cdot 2=1}{\frac{\overset{1}{e^{-x}}\,(e^{2x}-1)}{\underbrace{(e^{x}+e^{-x})}_{2}\,\underset{1}{2x}}}\cdot 2+\overset{0}{\frac{\cancel{x^{2}}}{\cancel{x}}}\right]=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(\operatorname{sh}x+2)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}+2\right)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(e^{x}\cdot\left(\frac{1-e^{-2x}+4e^{-x}}{2}\right)\right)}{x}$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\left[\overset{1}{\frac{\overset{x}{\ln(e^{x})}}{x}}+\underset{0}{\frac{\overset{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1-\overset{0}{e^{-2x}}+4\overset{0}{e^{-x}}}{2}\right)}}{\underset{+\infty}{x}}}\right]=1$$

PROPRIETÀ

SE $f \sim g$ IN P_0, ALLORA

$$\lim_{P \to P_0} f(P) \cdot h(P) = \lim_{P \to P_0} g(P) \cdot h(P)$$

[SE ESISTE UNO ESISTE ANCHE L'ALTRO]

Dim: SUPPONGO ESISTA $\lim_{P \to P_0} (f \cdot h) = L_1 \in \mathbb{R}$

ALLORA $\lim_{P \to P_0} (g \cdot h) = \lim \left(\frac{g}{f} \cdot f \cdot h \right) = \lim \left(\frac{g}{f} \right) \cdot \lim (f \cdot h) = 1 \cdot L_1 = L_1$

$f \sim g \Rightarrow g \sim f$ (SUPPONGO VALIDA L'IP. DI NON ANNULLAMENTO)

NEL CASO DI LIMITI FINITI...

[SI PUÒ ESTENDERE AL CASO $L_1 \in \mathbb{R}^*$]

VICEVERSA, SE ESISTE $\lim_{P \to P_0} (g \cdot h) = L_2$ SI HA

$$\lim_{P \to P_0} (f \cdot h) = \lim_{P \to P_0} \left(\frac{f}{g} \cdot g \cdot h \right) = \lim \left(\frac{f}{g} \right) \lim (g h) = 1 \cdot L_2 = L_2$$

COME SOPRA

$\square$

ESEMPI

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$$

$\operatorname{sen} x \sim x$ $\quad x \operatorname{sen} x \longrightarrow x \cdot x$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$ $\quad (1 - \cos x) \cdot 1 \longrightarrow \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \cdot 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2} x^2} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cdot \tan x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{th} x^3} = \left(\begin{matrix}\operatorname{sen} x \sim x \\ \tan x \sim x\end{matrix}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{th} x^3} = (\operatorname{sh} x \sim x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x \cdot x}{\operatorname{th} x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\operatorname{th}(x^3)} = (t = x^3) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\operatorname{th}(t)} =$$

$$= (\operatorname{th}(t) \sim t) = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{th} t}{t} = \lim_{t\to 0} \overset{1}{\boxed{\frac{\operatorname{sh} t}{t}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\operatorname{ch} t}}_{1}$$

$$= 1$$

$$\operatorname{th} t \sim t \quad (t \to 0)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x - \tan x)(1 - \cos x)}{x^5} =$$

$$= \left(1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x - \tan x) \cdot \frac{1}{2} \cancel{x^2}}{x^{\cancel{5}\,3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)\frac{1}{2}}{x^3} =$$

$$= (\operatorname{sen} x \sim x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\left(\frac{\cos x - 1}{\cos x}\right)\frac{1}{2}}{x^{\cancel{3}\,2}} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \underbrace{\boxed{\frac{\cos x - 1}{x^2}}}_{-1/2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{1} = -\frac{1}{4}$$

OSSERVAZIONE

QUESTA PROP. VIENE SPESSO USATA MALE. SE IL PRODOTTO NON SI TROVA DA SOLO, MA È PER ESEMPIO UN ADDENDO, NON VALE LA PROPRIETÀ.

CONTROESEMPIO: VISTO CHE PER $x \to 0$ $\cos x \sim 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x \cos x - \sin x}{x^3} \overset{?}{=} (\cos x \sim 1) = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$$

SBAGLIATO!

$\tan x \cos x = \sin x$, QUINDI IL NUMERATORE È NULLO (E NON INFINITESIMO) E IL RISULTATO È ZERO.

PROPOSIZIONE SE f E g SONO INFINITESIMI IN P_0 DELLO STESSO ORDINE, ALLORA ESISTONO UN OPPORTUNO INTORNO I DI P_0, UNA COSTANTE $L \neq 0$, E UN INFINITESIMO IN P_0, $\sigma(P)$, TALI CHE

$$(*) \quad |f(P)| = L|g(P)| + |g(P)|\,\sigma(P) \qquad \forall P \in I \setminus \{P_0\}$$

E VICEVERSA

DIM. POICHÉ $\displaystyle\lim_{P\to P_0} \frac{|f(P)|}{|g(P)|} = L \neq 0$, BASTA PORRE

$$\sigma(P) = \frac{|f(P)|}{|g(P)|} - L$$

E MOLTIPLICARE PER $|g(P)|$.

PER IL VICEVERSA SI DIVIDE (4) PER $|g(P)|$

$\square$

[QUINDI $\lim\limits_{P\to P_0} \frac{f}{g} = L \neq 0 \iff f(P) = L\,g(P) + g(P)\,\sigma(P)$
$\forall P \in I \setminus \{P_0\}$

OVVERO $\sigma(P) = \frac{f(P)}{g(P)} - L$ È INFINITESIMO IN P_0]

OSS. SE $f \overset{i}{>} g \quad (P \to P_0)$, ALLORA ESISTONO UN INTORNO I DI P_0 ED UN INFINITESIMO IN P_0, $\sigma(P)$, TALI CHE

$$f(P) = g(P)\,\sigma(P) \qquad \forall P \in I \setminus \{P_0\}$$

[QUINDI DIRE CHE $\lim\limits_{P\to P_0} \frac{f}{g} = L$ EQUIVALE A DIRE CHE $f(P)$ SI PUÒ SCRIVERE COME SOMMA DI 2 INFINITESIMI, DI CUI UNO È $L\,g(P)$ E L'ALTRO È DI ORDINE SUPERIORE A $g(P)$]

DEFINIZIONE PARTE PRINCIPALE

SIANO f E g INFINITESIMI IN P_0 E SIA

$$\lim_{P\to P_0} \frac{f}{g} = L \neq 0,$$

ALLORA $L\cdot g$ SI DICE PARTE PRINCIPALE DI f RISPETTO g.

PROP.

SIA $L\cdot g$ LA PARTE PRINCIPALE DI f RISPETTO g, ALLORA SI HA:

1) $f \overset{i}{=} g \quad (P\to P_0)$

2) $f \sim Lg \quad (P\to P_0)$

3) $f = Lg + g\cdot\sigma$ CON σ INFINITESIMO IN P_0

4) f DIFFERISCE DA $L\cdot g$ PER UN INFINITESIMO, $g\cdot\sigma$, DI ORDINE SUPERIORE A f.

LA DIMOSTRAZIONE DI QUESTE PROPRIETÀ SI OTTIENE DALLE CONSIDERAZIONI FATTE SOPRA.

ESEMPI

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2\tan x)}{1-\cos x} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2(2\tan x) \sim 4\tan^2 x \\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2} = 8$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2\tan x)}{\tan^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{4\operatorname{sen}^2(2\tan x)}{(2\tan x)^2}$$

$$= \left(t = 2\tan x\right) = \lim_{t\to 0} \frac{4\operatorname{sen}^2(t)}{t^2} = 4$$

$$\operatorname{sen}^2(2\tan x) \sim 4\tan^2 x$$

$$\left[\operatorname{sen}^2(2\tan x) = 4\tan^2 x + \tan(x)\,\sigma(x)\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x^7 - \tan x}{\operatorname{sen} x(1-\cos x) + x^8} = (\text{P.d.S.}) = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\operatorname{sen} x - \tan x}^{x^3 < x^7}}{\underbrace{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}_{x\cdot x^2 < x^8}} = (*)$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x - \tan x \sim -\frac{1}{2}x^3 \\ \operatorname{sen} x \sim x \\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3}{x\left(\frac{1}{2}x^2\right)} = -1$$

$$\left[\operatorname{sen} x - \tan x = -\frac{1}{2}x^3 + x^3\sigma_1(x)\right] \quad \left[\operatorname{sen} x = 1\cdot x + x\,\sigma_2(x)\right]$$

$$\left[1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + x^2\sigma_3(x)\right]$$

$$(*)\ \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + x^3\sigma_1(x)}{(x + x\sigma_2)\left(\frac{1}{2}x^2 + x^2\sigma_3\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + \overbrace{x^3\sigma_1(x)}^{\succ x^3}}{\frac{1}{2}x^3 + \underbrace{\frac{1}{2}x^3\sigma_2(x)}_{\succ x^3} + \underbrace{x^3\sigma_3(x)}_{\succ x^3} + \underbrace{x^3\sigma_2(x)\sigma_3(x)}_{\succ x^3}}$$

$$= (\text{P.d.S.}) = -1$$

DEF. "o" O PICCOLO

SIANO f E g DUE FUNZIONI DEFINITE IN UN INTORNO I DI P_0, ESCLUSO AL PIÙ P_0, E SIA g DIVERSA DA ZERO IN $I \setminus \{P_0\}$.

SE $\lim\limits_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = 0$ SI DICE CHE f È UN "O PICCOLO" DI g IN P_0 E SI SCRIVE

"f È $o(g)$"

[f E g NON SONO SUPPOSTE INFINITESIME]

TORNIAMO ALL'ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x^7 - \tan x}{\sin x(1-\cos x) + x^8} = [P.d.S.] = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \tan x}{\sin x(1-\cos x)} =$$

(*)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{(x+o(x))\left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{2}x^3 + o(x^3)} = [P.d.S.] =$$

$$= -1$$

$x\,o(x^2)$ È $o(x^3)$

$\frac{1}{2}x^2 o(x)$ È $o(x^3)$

$o(x)\,o(x^2)$ È $o(x^3)$

È $o(x^3) + o(x^3) = o(x^3)$

ESERCIZI

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \frac{1}{2} x + x^3}{\tan x - 1 + \cos x} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + \cos x + x^4 - 1}{x^5 - \tan^4 x + \operatorname{sen}(x^2)}$$