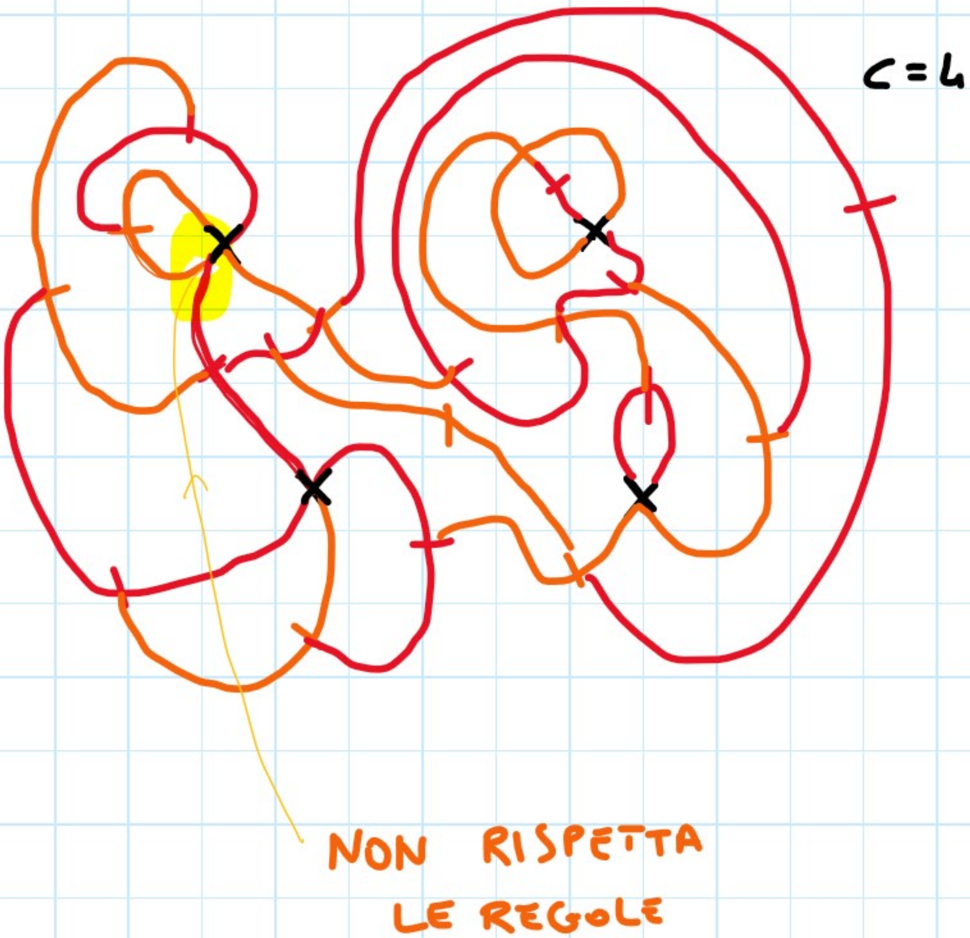
Cavoletti di Bruxelles

venerdì 22 ottobre 2021 20:37

Disegno *c* cavoletti con 4 braccetti ciascuno: X.
Posso unire 2 B (braccetti) qualsiasi senza intersecare le altre linee e poi aggiungo due B su ogni linea tracciata, uno per parte. Si gioca in due a turno, vince chi disegna l'ultima linea possibile.
Esiste una strategia vincente?



Ad ogni mossa succede:

1) Unisco due zone non collegate (le chiamo isole I), oppure
2) Unisco due B della stessa I, allora creo una regione chiusa (le chiamo R)

Quindi: $R - I - n = costante$ con *n* numero di mosse.
Usando la condizione iniziale ottengo che la costante è pari a -*c*, quindi $n = R + c - I$.

Ogni mossa lascia invariato il numero di B liberi: $B_0 = B_f = 4c$.

Il gioco finisce di sicuro perché il numero di mosse possibili è finito, alla fine ogni regione *R* avrà un solo *B* interno (altrimenti non ho ancora finito) e sarà rimasto un solo *B* esterno, quindi:
$R_f = B_f - 1 = 4c - 1$.

CONCLUSIONE: $n_f = R_f + c - I_f = (4c - 1) + c - 1 = 5c - 2$, si finisce sempre in *5c-2* mosse, quindi se *c* pari vince il secondo, se c dispari vince il primo.

Fiammiferi soluzione

venerdì 22 ottobre 2021 21:06

Ci sono *n* fiammiferi, a turno due giocatori ne devono sottrarre da 1 a 6. Vince chi toglie l'ultimo. Esiste strategia vincente?

Guardiamo le ultime mosse: uso V per dire che vince il primo, P per dire che il primo perde, *n* per indicare il numero di fiammiferi.

n	
1	V
2	V
3	V
4	V
5	V
6	V
7	P
8	V
9	V
10	V

- Sia $\mathcal{P} = \{n\ che\ portano\ a\ P\}$, se sono in $\mathcal{P}$ perdo (immagino di essere io il primo), altrimenti esiste una strategia vincente: tenere l'altro in $\mathcal{P}$.
  Quindi se $n = 7k$ con $k \in \mathbb{N}_0$ perdo, il secondo deve togliere $7 - l$ fiammiferi quando io ne tolgo l per tenermi in $\mathcal{P}$. Negli altri casi vinco usando la prima mossa per mandare il secondo in $\mathcal{P}$ e poi uso la strategia di prima per tenerlo in $\mathcal{P}$.

Prima variante fiammiferi

venerdì 22 ottobre 2021 21:15

Posso togliere 2,5 o 6 fiammiferi. Esiste strategia vincente?

n	
1	P
2	V
3	V
4	P
5	V
6	V
7	V
8	P
9	V

n	
10	V
11	P
12	P
13	V
14	V
15	P
16	V
17	V
18	V

n	
19	P
20	V
21	V
22	P
23	P
24	V
25	V
26	P
27	V

Sembra esserci uno schema regolare con periodo 11. Dimostriamo per induzione tale periodicità.

Suppongo che: $11k+1, 11k+4, 11k+8, 11k+11$ siano tutti perdenti.
Per $k=0$ è corretto.

Sia vero per un certo k, verifichiamolo per $k+1$:

IP. INDUTTIVA (k)		$(k+1)$		
$11k+1$	P	$11(k+1)+1 = 11k+12$	P	PERCHÈ DISTA 2,5,6 DA V
$11k+2$	V	$11(k+1)+2 = 11k+13$	V	DISTA 2 DA $11k+11$ P
$11k+3$	V	$11(k+1)+3 = 11k+14$	V	DISTA 6 DA $11k+8$ P
$11k+4$	P	$11(k+1)+4 = 11k+15$	P	PERCHÈ DISTA 2,5,6 DA V
$11k+5$	V	$11(k+1)+5 = 11k+16$	V	DISTA 5 DA $11k+11$ P
$11k+6$	V	$11(k+1)+6 = 11k+17$	V	DISTA 6 DA $11k+11$ P
$11k+7$	V	$11(k+1)+7 = 11k+18$	V	DISTA 6 DA $11k+12$ P
$11k+8$	P	$11(k+1)+8 = 11k+19$	P	PERCHÈ DISTA 2,5,6 DA V
$11k+9$	V	$11(k+1)+9 = 11k+20$	V	DISTA 5 DA $11k+15$ P
$11k+10$	V	$11(k+1)+10 = 11k+21$	V	DISTA 6 DA $11k+15$ P
$11k+11$	P	$11(k+1)+11 = 11k+22$	P	PERCHÈ DISTA 2,5,6 DA V

Seconda variante fiammiferi

sabato 23 ottobre 2021 20:36

Posso togliere solo potenze di 2.

m	
1	V
2	V
3	P
4	V
5	V
6	P
7	V
8	V
9	P
10	V

Sembra che le perdenti siano quelle del tipo $3k$.
Posso rifare induzione con periodo 3 oppure noto che la posizione successiva ad una perdente e la sua successiva sono sicuramente vincenti.
Le posizioni che distano un multiplo di 3 dalla prima posizione perdente (la terza) sono sicuramente perdenti, perché nessun multiplo di 3 può essere una potenza di 2, quindi tutte le posizioni del tipo $3k$ con $k \geq 1$ intero sono perdenti, mentre le altre, essendo distanti 1 o 2 da una posizione perdente (sono del tipo $3k + 1$ o $3k + 2$) saranno vincenti.

Terza variante fiammiferi

sabato 23 ottobre 2021 21:08

Gioco in solitaria e posso fare due tipi di mosse quante volte voglio:
A) togliere 5 fiammiferi
B) se il numero di fiammiferi è divisibile per 7, allora posso togliere $\frac{4}{7}$ dei fiammiferi.

Vinco se riesco a togliere tutti i fiammiferi.
Se indico con n il numero totale di fiammiferi, per quali n esiste una strategia vincente?

Se n è del tipo $5k$ con $k \geq 1$ intero vinco usando k volte la mossa A).

Se n non è del tipo $5k$, allora dovrò usare la mossa B) almeno una volta. Essa non può concludere il gioco perché non può dare come risultato 0, quindi non può essere l'ultima mossa. Allora l'ultima mossa deve essere del tipo A), ma essa può concludere solo se n è diventato un multiplo di 5.
Verifichiamo quindi che la mossa B) non può trasformare un numero non divisibile per 5 in uno divisibile per 5, per concludere se $n \neq 5k$ allora non si può vincere.
La mossa B) equivale a moltiplicare per $\frac{3}{7}$, quindi trasforma i fattori 7 in fattori 3, quindi non trasforma numeri non divisibili per 5 in numeri divisibili per 5.
Non potendo concludere quando $n \neq 5k$, esiste strategia vincente solo se $n = 5k, k \geq 1$.