Quarta variante fiammiferi

sabato 23 ottobre 2021 21:15

Come nel caso precedente, ma vinco se restano 3 fiammiferi.

n	
1	P
2	P
3	V
4	P
5	P
6	P
7	V
8	V
9	P
10	P
11	P
12	V
13	V

Sembra che i vincenti siano quelli del tipo $3+5k$ e $7+5k$ con $k \geq 0$. Essi sono chiaramente vincenti, ai primi basta togliere k volte 5, ai secondi, dopo aver tolto k volte 5, si applica la mossa B).
Dimostriamo ora che tutti gli altri sono perdenti.

$n = 1, 2$ sono perdenti. I numeri del tipo $5k$ non cambiano "classe" con la mossa A), se sono anche divisibili per 7 sono del tipo $5 \cdot 7 \cdot q$, tramite la mossa B) diventano del tipo $5 \cdot 3 \cdot q$ e quindi non cambiano "classe" (dividendoli per 5 continuano a dare resto 0). In questo caso le 2 mosse non possono portare al 3 perché continuano a portare a numeri divisibili per 5.

Se $n = 5k + 1$ diremo che è di classe 1. La mossa A) non fa cambiare la classe, quindi posso concludere con la mossa A) solo se la mossa B) porta questi numeri in classe 3 $\quad (resto\ 3)$. Verifichiamo che la mossa B) porta i numeri (divisibili per 7) di classe 1 in classe 4 (resto 4) e viceversa.

$$\frac{3}{7}(5k+1) = \frac{3}{7}(5(k-4)+20+1) = \frac{3}{7}(5(k-4)+21) = \frac{3}{7}5(k-4)+9$$
$$= 5m + 9 = 5(m+1) + 4 \Longrightarrow classe\ 4.$$

$$\frac{3}{7}(5k+4) = \frac{3}{7}(5(k-2)+10+4) = \frac{3}{7}(5(k-2)+14) = \frac{3}{7}5(k-2)+6$$
$$= 5m + 6 = 5(m+1) + 1 \Longrightarrow classe\ 1.$$

Visto che le due mosse non possono portare i numeri di classe 1 e 4 in classe 3, non permettono di concludere, quindi questi numeri sono perdenti. Oltre a questi sono il numero 2 è perdente, avendo dimostrato che tutti gli altri sono vincenti.

Sacchi di caramelle

sabato 23 ottobre 2021 21:36

Considero due sacchi A e B, A con m caramelle, B con n caramelle.
Ad ogni turno svuoto un sacchetto e ripartisco l'altro lasciando almeno una caramella su ogni sacco. Si gioca in due a turno e perde il primo che non può più fare questa mossa.

A	B		
1	1	P	
2	1	V	ANDANDO IN 1,1
2	2	V	-- ---- -- ---
2	x	V	BUTTO x E POI 1,1
3	1	P	DEVO SVUOTARE B → 2,1 o 1,2 → PERDO
3	3	P	VADO IN 2,1 o 1,2 → PERDO
3	4	V	SVUOTO A E VADO IN 3,1 → VINCO
3	5	P	SE BUTTO 5 VADO IN 2,1 o 1,2 → PERDO

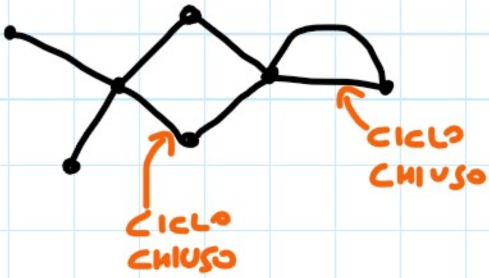
SE ---- 3 ---- IN $\underbrace{3,2 \text{ o } 2,3}_{\text{PERDO}}$, o $\underbrace{1,4 \text{ o } 4,1}$ → PERDO PERCHÈ L'ALTRO MI PORTA IN 3,1 o 1,3

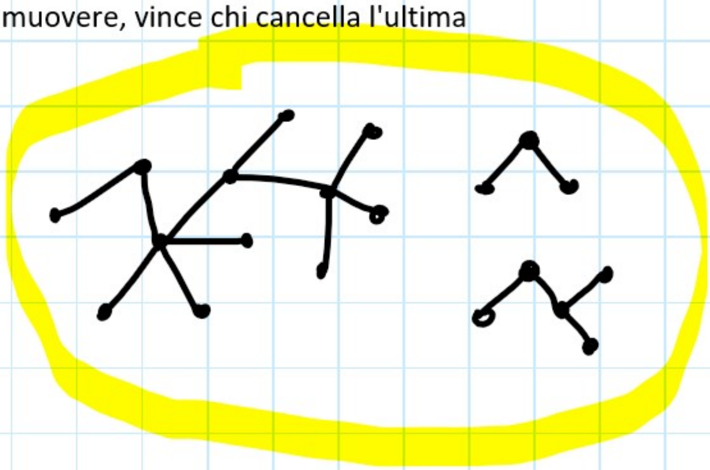
In generale perciò perdo se ho 2 dispari, infatti ne butto uno e divido l'altro in due: uno pari e uno dispari. Allora il secondo butta il dispari e divide il pari n in altri due dispari: 1 e $n-1$, così si genera successione di numeri dispari strettamente decrescente che porta a 1,1.
Se c'è almeno un pari invece vinco, tengo il pari e lo divido in due dispari, mettendo l'avversario nella situazione perdente descritta in precedenza.

Grafi semplici

domenica 24 ottobre 2021 14:06

Consideriamo ora grafi senza cicli chiusi (grafi semplici: tra due vertici un solo arco). Nelle estremità di un arco c'è sempre un vertice.
Ad ogni mossa o tolgo un arco e lascio i vertici, oppure cancello un vertice e tutti gli archi collegati. Si gioca in 2 a turno e perde chi non può più muovere, vince chi cancella l'ultima cosa rimasta.





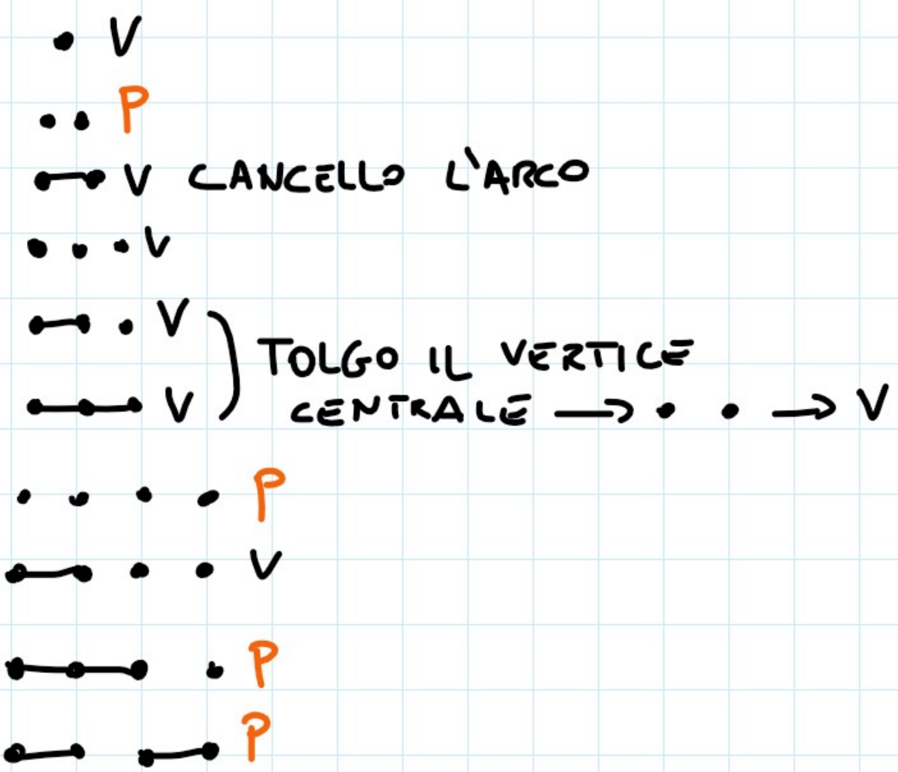
GRAFO SEMPLICE

V = 20, A = 17, C = 3

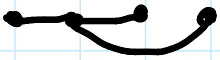
V = numero di vertici
A = numero di archi
C = numero di componenti connesse

In ogni componente connessa: A=V-1, se ho C componenti connesse: A=V-C.

Analizzo i primi casi:



 V TOLGO L'ARCO CENTRALE

 V TOLGO UN ARCO

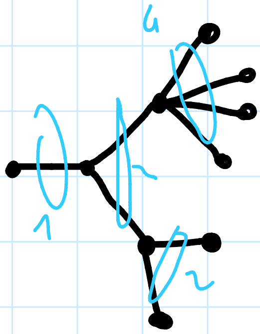
Congetturo che sono perdenti le configurazioni con V, A e C pari.
Analizzo le mosse ricordando che C=V-A ipotizzando $A \geq 1$, il caso $A = 0$ verrà analizzato alla fine.

	ΔV	ΔA	ΔC
TOLGO ARCO	0	-1	+1
TOLGO VERTICE ESTERNO (FOGLIA)	-1	-1	0
TOLGO VERTICE INTERNO	-1	-m	m-1
TOLGO VERTICE ISOLATO	-1	0	-1

Quindi se sono in una configurazione tutta pari, allora almeno uno tra V, S e C diventa dispari. Se almeno uno è dispari ci sono tre casi:

1) A e C dispari (V=A+C pari) tolgo arco e diventano tutti pari
2) A dispari e C pari (V=A+C dispari) tolgo vertice esterno e diventano tutti pari
3) A pari e C dispari (V=A+C dispari) tolgo vertice interno collegato ad un numero *n* pari di archi (!) e diventano tutti pari

(!) *dimostriamo che in questo caso esiste sempre un vertice collegato ad un numero pari di archi.*
Su ogni componente posso cominciare a contare gli archi da un vertice esterno (1 arco) e poi sommare gli archi che escono dall'altro vertice (ce ne sarà almeno un altro visto che A è pari) e proseguire fino in fondo. Se tutti i vertici sono collegati ad un numero dispari di archi la somma viene così:
$1 + (2m) + (2l) + \cdots + (2p) = dispari$. Ma visto che le componenti considerate in questo caso sono dispari: $A_{tot} = somma\ di\ un\ numero\ dispari\ di\ addendi\ tutti\ dispari = dispari$, assurdo A_{tot}è pari per ipotesi.



$1+2+4+2=9$

Quindi se sono in situazione con A(>0), V e C pari ogni mossa trasforma almeno uno in dispari, mentre se almeno uno di essi è dispari c'è una mossa che li riporta tutti pari. Quindi se l'avversario è in una situazione pari, possiamo tenerlo lì. Visto che questa strategia fa sempre diminuire il numero di archi (basta non togliere un vertice isolato, che sarà possibile visto che A>0) il gioco ha sempre fine (finiti gli archi restano solo i vertici isolati).
L'unica mossa non analizzata riguarda i vertici isolati (A=0), mossa che fa diminuire di 1 V e C, quindi porta il numero di vertici da pari a dispari e viceversa. Chiaramente vince chi si trova nella condizione dispari.

In definitiva la strategia vincente per il giocatore che ha almeno 1 tra A, V e C dispari è la seguente: 1) finché ci sono archi in gioco risponderà al gioco avversario con una delle prime tre mosse descritte inizialmente nella tabella, riportando sempre l'avversario in una situazione con A, V e C pari, 2) in un massimo di A mosse saranno terminati gli archi. 3) se saranno finiti anche i vertici avrà vinto, 4) quando saranno presenti solo vertici potranno essere in numero pari e toccherà all'avversario, oppure in numero dispari e toccherà al giocatore dei turni con almeno un elemento dispari, giocatore che vincerà la partita.

Divisori

domenica 24 ottobre 2021 15:12

Si parte da un numero $n \in \mathbb{N}$ assieme a tutti i suoi divisori positivi. Due giocatori a turno tolgono un numero e tutti i suoi divisori, chi toglie l'ultimo numero ha perso. Esiste strategia vincente?

Qualunque sia la prima mossa verrà cancellato il numero 1. Supponiamo che sia il secondo giocatore ad avere strategia vincente, vuol dire che il secondo vince indipendentemente dalla prima mossa del primo giocatore. Ma se il primo toglie il numero 1 allora il secondo si trova nelle condizioni del primo (l'unica differenza è che il secondo non può togliere il numero 1 in nessun caso) e quindi il primo può usare la strategia vincente del secondo, e quindi vince il primo. Assurdo, quindi il primo ha strategia vincente.
In questa dimostrazione non costruttiva viene dato per scontato che in tutti i giochi con un numero finito di mosse esiste sempre una strategia vincente.